# SUJETS

## DES LOIS DE KEPLER À L'ÉTUDE D'UN ASTÉROÏDE…

*L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de quelques planètes du système solaire et de déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia, récemment découvert par une équipe d'astronomes. Celui-ci a la forme d'une grosse pomme de terre mesurant quelques centaines de kilomètres.*
*Par souci de simplification, dans tout l'exercice, les astres étudiés sont considérés à répartition sphérique de masse.*
*Donnée : constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I*
***Les représentations vectorielles demandées sont à effectuer sans souci d'échelle.***

**1. En hommage à Kepler**

*« Johannes Kepler, né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt, près de Stuttgart (Allemagne), mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne, est un astronome célèbre. Il a étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic. Il a également découvert que les trajectoires des planètes n'étaient pas des cercles parfaits centrés sur le Soleil mais des ellipses. En outre, il a énoncé les lois (dites lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leurs orbites. »*

**1.1. Planètes en orbite elliptique.**

*La figure 10 ci-dessous représente la trajectoire elliptique du centre d'inertie M d'une planète du système solaire de masse m dans le référentiel héliocentrique considéré galiléen. Les deux foyers $F_1$ et $F_2$ de l'ellipse et son centre O sont indiqués.*

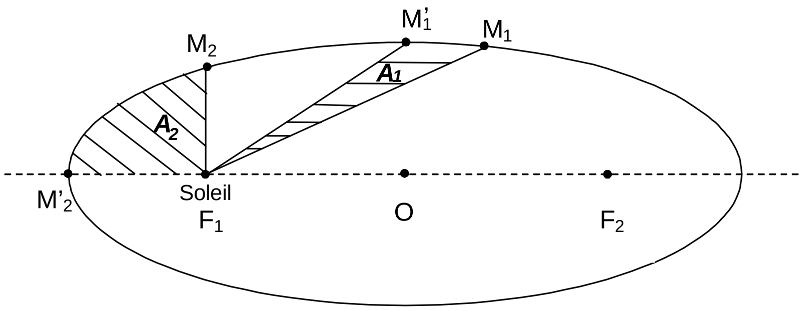



**Figure 10**

**1.1.1.** En utilisant une des lois de Kepler, justifier la position du Soleil indiquée sur la figure 10.

**1.1.2.** On suppose que les durées de parcours entre les points $M_1$ et $M'_1$ puis $M_2$ et $M'_2$ sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, trouver la relation entre les aires hachurées $A_1$ et $A_2$ sur la figure 10.

**1.1.3.** La valeur de la vitesse moyenne entre les points $M_1$ et $M'_1$ est-elle inférieure, égale ou supérieure à celle entre les points $M_2$ et $M'_2$ ? Justifier.

**1.2. Planètes en orbite circulaire.**

*Dans cette partie, pour simplifier, on modélise les trajectoires des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique par des cercles de rayon r dont le centre O est le Soleil de masse $M_S$.*

**1.2.1.** Représenter sur la ***FIGURE 11*** la force de gravitation $\vec{F_3}$ exercée par le Soleil sur une planète quelconque du système solaire de masse *m* dont le centre d'inertie est situé au point $M_3$.

**1.2.2.** Donner l'expression vectorielle de cette force au point $M_3$, en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$.

*Pour la suite on considère que les valeurs des autres forces de gravitation s'exerçant sur la planète sont négligeables par rapport à la valeur de $\vec{F_3}$.*

**1.2.3.** En citant la loi de Newton utilisée, déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a_3}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire dont le centre d'inertie est situé au point $M_3$.

**1.2.4.** Représenter sur la ***FIGURE 11*** les vecteurs accélérations $\vec{a_3}$ et $\vec{a_4}$ du centre d'inertie d'une planète quelconque du système solaire respectivement aux points $M_3$ et $M_4$.

**1.2.5.** En déduire la nature du mouvement du centre d'inertie d'une planète quelconque de masse *m* du système solaire.

**1.2.6.** Le graphe de la ***FIGURE 12*** représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

**1.2.7.** En utilisant le graphe de la ***FIGURE 12***, montrer que $\frac{T^2}{r^3} \simeq 3{,}0 \times 10^{-19}$ S.I.

**1.2.8.**

> *« Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérome Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans. »*
>
> *D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

À l'aide des données de l'article précédent et du résultat de la question 1.2.7., calculer la distance séparant les centres respectifs de Rhea Sylvia et du Soleil.

***<u>Donnée :</u>*** *1 an = 365 jours*

**2. La troisième loi de Kepler comme balance cosmique…**

> *« Grâce au Very Large Telescope de l'European Southern Observatory (ESO) au Chili, les astronomes ont également découvert que Rhea Sylvia était accompagné de deux satellites baptisés Remus et Romulus. Leurs calculs ont montré que les deux satellites décrivent une orbite circulaire autour de Rhea Sylvia ; Romulus effectue son orbite en 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Rhea Sylvia sont respectivement de 710 kilomètres pour Remus et 1360 kilomètres pour Romulus.»*
>
> *D'après un article paru dans LE MONDE le 13.07.2005*

*On s'intéresse désormais au mouvement circulaire uniforme du centre d'inertie d'un satellite de Rhéa Sylvia. L'étude est faite dans un référentiel "Rhéa Sylvia-centrique" muni d'un repère dont l'origine est le centre de Rhéa Sylvia et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes.*

**2.1.** On rappelle que la troisième loi de Kepler a pour expression littérale : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$. Dans le cadre de l'étude du mouvement de Remus et Romulus autour de Rhea Sylvia, donner la signification de chaque grandeur et son unité. En déduire l'unité de G dans le système international.

**2.2.** À l'aide des données de l'article précédent et de la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Rhea Sylvia.

**<u>ANNEXE:</u> Questions 1.2.1 et 1.2.4.**

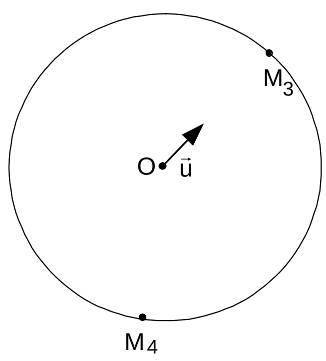



**Figure 11**

**<u>ANNEXE:</u> Questions 1.2.6. et 1.2.7.** $T^2 = f(r^3)$

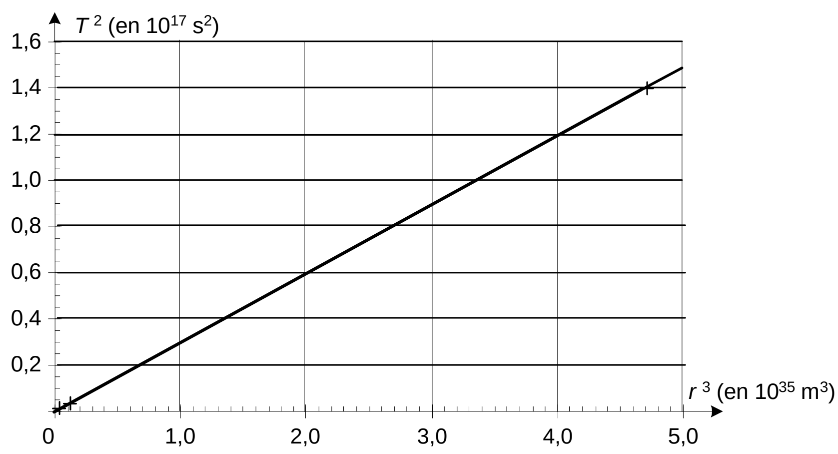



**Figure 12**

# VOYAGE AUTOUR DE SATURNE.

En Juillet 2004, la sonde européenne Cassini-Huygens nous a livré ses premiers clichés des anneaux de Saturne.

Elle a également photographié Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance $R_T$ de Saturne. L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.

Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.

On considère que la planète Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.

***Données :*** *$G = 6{,}67\times10^{-11}$ S.I. : constante de gravitation universelle.*

*Concernant Titan : $R_T = 1{,}22\times10^{6}$ km (rayon de l'orbite de Titan).*

*Concernant Saturne : $R_S = 6{,}0\times10^{4}$ km (rayon de la planète Saturne).*

*$T_S$ = 10 h 39 min (période de rotation de Saturne sur elle-même).*

*$M_S = 5{,}69\times10^{26}$ kg (masse de Saturne).*

## 1. Quelques caractéristiques de Titan :

**1.1. Forces :** On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

**1.1.1.** Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse $M_T$.

**1.1.2.** Représenter qualitativement sur un schéma, Saturne, Titan, et la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.

**1.1.3.** Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force(s).

**1.2. Accélération et vitesse**

On étudie le mouvement du centre d'inertie T de Titan. S est le centre d'inertie de Saturne.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la droite ST dirigé de S vers T.

**1.2.1.** Exprimer son accélération vectorielle $\vec{a}$ en précisant la loi utilisée.

**1.2.2.** On se place dans la base orthonormée $(\vec{t},\vec{n})$ centrée en T dans laquelle $\vec{t}$ est un vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{t}$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ($\vec{n} = -\vec{u}$).

On donne l'expression de $\vec{a}$ dans la base orthonormée $(\vec{t},\vec{n})$ : $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$.

Donner les expressions littérales de $a_t$ et de $a_n$ en fonction de la vitesse v du satellite.

**1.2.3.** À quelle composante se réduit l'accélération vectorielle $\vec{a}$ de Titan dans la base orthonormée $(\vec{t},\vec{n})$ ? Compléter alors le schéma précédent, avec la base orthonormée $(\vec{t},\vec{n})$ et l'accélération $\vec{a}$ de Titan.

**1.3.** Type de mouvement

**1.3.1.** Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

**1.3.2.** Retrouver l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne : $v=\sqrt{\dfrac{GM_S}{R_T}}$

## 2. D'autres satellites de Saturne :

Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005.

On peut considérer que dans le référentiel saturno-centrique, Encelade à un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre), est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est $R_E$.

**2.1.** Loi de Kepler

La relation qui lie la période T de révolution d'un satellite, sa vitesse v et le rayon R de son orbite est $T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Sa vitesse de révolution autour de Saturne est donnée par : $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}$.

**2.1.1.** Retrouver la troisième loi de Kepler $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

**2.1.2.** Utiliser la troisième loi de Kepler pour déterminer la valeur du rayon $R_E$ de l'orbite d'Encelade.

**3. <u>Sonde saturno-stationnaire :</u>**

On cherche dans cette partie à déterminer l'altitude h à laquelle devrait se trouver la sonde Cassini pour être saturno-stationnaire (immobile au-dessus d'un point de l'équateur de Saturne).

**3.1.** Quelle condition doit-on avoir sur les périodes Ts (rotation de Saturne sur elle-même) et Tc (révolution de Cassini autour de Saturne) pour que la sonde soit « saturno-stationnaire »?

**3.2.** Altitude de la sonde

**3.2.1.** En utilisant la troisième loi de Kepler donnée à la question **2.1.1.** , montrer que l'altitude h de la sonde peut se calculer avec la relation: $h = \sqrt[3]{\frac{T_C^2 G M_S}{4\pi^2}} - R_S$

**3.2.2.** Calculer la valeur de h.

**GALILEO.**

*Connaître sa position exacte dans l'espace et dans le temps, autant d'informations qu'il sera nécessaire d'obtenir de plus en plus fréquemment avec une grande fiabilité. Dans quelques années, ce sera possible avec le système de radionavigation par satellite GALILEO, initiative lancée par l'Union européenne et l'Agence spatiale européenne (ESA). Ce système mondial assurera une complémentarité avec le système actuel GPS (Global Positioning System).*

*GALILEO repose sur une constellation de trente satellites et des stations terrestres permettant de fournir des informations concernant leur positionnement à des usagers de nombreux secteurs (transport, services sociaux, justice, etc…).*

*Le premier satellite du programme, Giove-A, a été lancé le 28 décembre 2005.*

*D'après le site* http://www.cnes.fr/

***<u>DONNEES :</u>***

- *Constante de gravitation : $G = 6{,}67\times10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$*
- *La Terre est supposée sphérique et homogène. On appelle O son centre, sa masse $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg et son rayon $R_T = 6{,}38\times10^3$ km*
- *Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse $m_{sat}$ = 700 kg. Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et il décrit de façon uniforme un cercle de centre O, à l'altitude $h = 23{,}6\times10^3$ km.*

**<u>I – Mouvement du satellite Giove-A autour de la Terre</u>**

1 – a - Sans souci d'échelle, faire un schéma représentant la Terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la Terre sur le satellite.

b - En utilisant les notations du texte, donner l'expression vectorielle de cette force.

On notera $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers G.

2 – a - Dans quel référentiel le mouvement du satellite est-il décrit ?

b - Quelle hypothèse concernant ce référentiel faut-il faire pour appliquer la seconde loi de Newton ?

c - En appliquant la seconde loi de Newton au satellite, déterminer l'expression du vecteur-accélération $\vec{a}$ du point G.

3 – a - Donner les caractéristiques du vecteur-accélération $\vec{a}$ d'un point matériel ayant un mouvement circulaire uniforme.

b - Montrer alors que la vitesse v du satellite est telle que : $v^2 = G\frac{M_T}{R}$ avec $R = R_T + h$

4 – a - Définir la période de révolution T du satellite.

Donner son expression en fonction de G, $M_T$ et R.

b - Calculer la période T.

**<u>II – Comparaison avec d'autres satellites terrestres</u>**

*Il existe actuellement deux systèmes de positionnement par satellites : le système américain* GPS *et le système russe* GLONASS.

*Le tableau fourni sur l'**ANNEXE**, rassemble les périodes* T *et les rayons* R *des trajectoires des satellites correspondants, ainsi que les données relatives aux satellites de type Météosat.*

*Ces données permettent de tracer la courbe donnant $T^2$ en fonction de $R^3$.*

1 - a - Compléter la ligne du tableau relative au satellite Giove-A (GALILEO).

b - Placer le point correspondant dans le système d'axes proposés sur l'annexe et tracer la courbe donnant $T^2$ en fonction de $R^3$.

2 - a - Que peut-on déduire du tracé précédent ? Justifier.

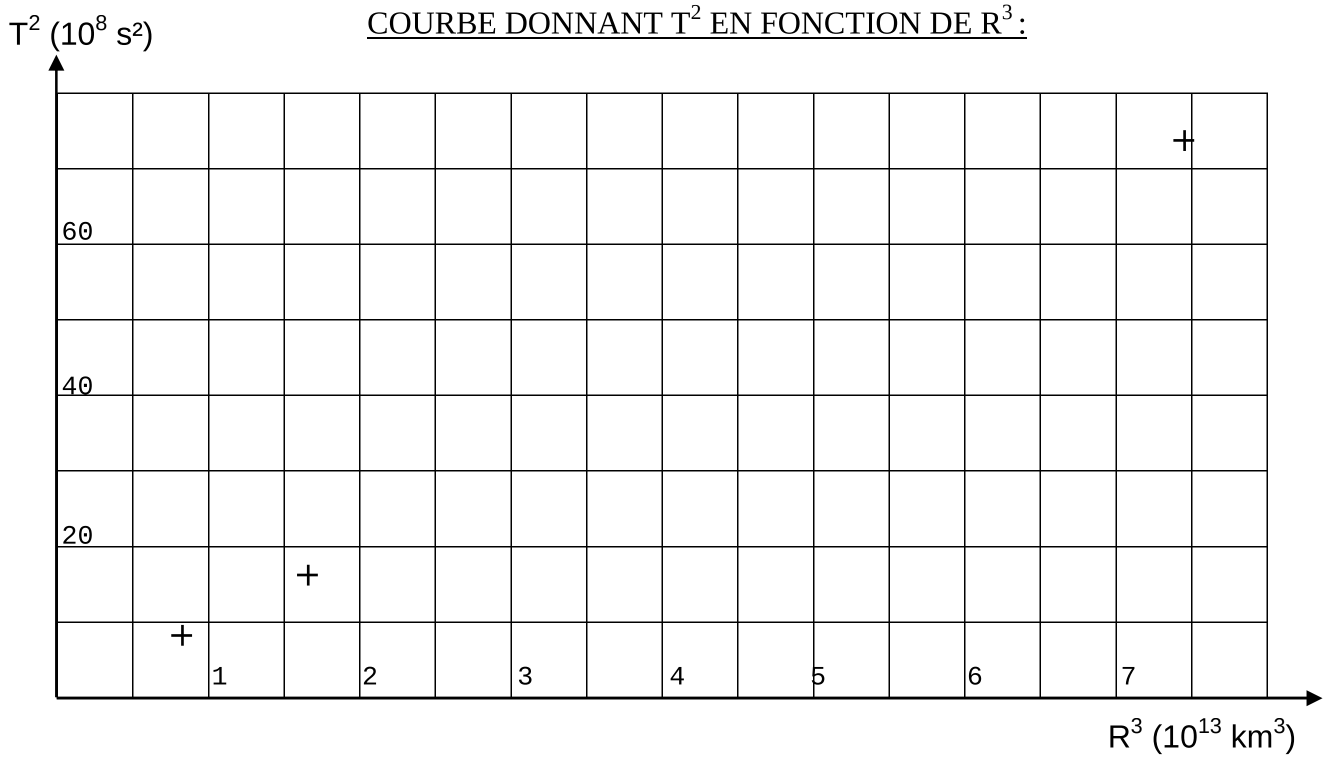
b - Montrer que le résultat de la question I-4-a est conforme au tracé obtenu.

c - Comment nomme-t-on la loi ainsi mise en évidence ?

**ANNEXE**

| Satellite | Rayon de la trajectoire R (km) | Période de révolution T (s) | $R^3$ ($km^3$) | $T^2$ ($s^2$) |
|---|---|---|---|---|
| GPS | $20{,}2\times10^3$ | $2{,}88\times10^4$ | $8{,}24\times10^{12}$ | $8{,}29\times10^8$ |
| GLONASS | $25{,}5\times10^3$ | $4{,}02\times10^4$ | $1{,}66\times10^{13}$ | $1{,}62\times10^9$ |
| GALILEO | | | | |
| METEOSAT | $42{,}1\times10^3$ | $8{,}58\times10^4$ | $7{,}46\times10^{13}$ | $7{,}36\times10^9$ |

COURBE DONNANT $T^2$ EN FONCTION DE $R^3$ :




## MISE EN ORBITE D'UN SATELLITE ARTIFICIEL PAR LA FUSEE ARIANE.

D'après Encyclopedia Universalis (1998) : (Certains renseignements et données sont nécessaires à la résolution du sujet).

Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages dont la hauteur totale est de 47,4 m et qui pèse, avec sa charge utile (satellite), 208 tonnes au décollage.

*Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote* $N_2O_4$ *(masse de peroxyde emportée : 147,5 tonnes).*

*L'intensité de la force de poussée totale* $\vec{F}$ *de ces 4 réacteurs est constante pendant leur fonctionnement: elle vaut* $F = 2445$ *kN.*

Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse de 200 km d'altitude un satellite de 4850 kg; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite de 965 kg; il peut aussi être utilisé pour placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

## 1) L'ascension de la fusée Ariane

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme : son intensité est $g_0 = 9{,}8$ m.s $^{-2}$.

On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.

On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.

**a)** Représenter clairement, sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.

**b)** A un instant quelconque, la masse de la fusée est m.

Déterminer en fonction de m et des intensités des 2 forces précédentes la valeur de l'accélération a.

**c)** On considère d'abord la situation au décollage. La masse de la fusée vaut alors $m_1$. Calculer la valeur numérique de l'accélération $a_1$ à cet instant.

On envisage la situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé. La masse de la fusée vaut alors $m_2$. Calculer la valeur numérique de $m_2$ puis celle de l'accélération $a_2$ à cet instant.

Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

**d)** La vitesse d'éjection $\overrightarrow{V_e}$ des gaz issus de la combustion du peroxyde d'azote est donnée par la relation: $\overrightarrow{V_e} = \frac{\Delta t}{\Delta m}.\vec{F}$ où $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est l'inverse de la variation de masse de la fusée par unité de temps et caractérise la consommation des moteurs.

Vérifier l'unité de $V_e$ par analyse dimensionnelle. Calculer la valeur numérique de $V_e$.

Quel est le signe de $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ ? En déduire le sens de $\overrightarrow{V_e}$. Qu'en pensez-vous ?

A l'aide d'une loi connue qu'on énoncera, expliquer pourquoi l'éjection des gaz propulse la fusée vers le haut.

## 2) Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel S, de masse $m_s$, en orbite circulaire (rayon r) autour de la Terre de masse $M_T$, de rayon $R_T$ et de centre O.

On suppose que la Terre est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point.

**a)** Préciser les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v.

**b)** Enoncer la loi de la gravitation universelle. On appelle G la constante de gravitation universelle.

Faire un schéma sur lequel les vecteurs-forces sont représentés.

**c)** Le satellite S est à l'altitude h : on a donc r = R + h.

On appelle $\overrightarrow{F_S}$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite. Cette force dépend de la position du satellite et on pose $\overrightarrow{F_S} = m_s.\vec{g}(h)$ . On note g(h) l'intensité de la pesanteur $\vec{g}(h)$ à l'endroit où se trouve le satellite: $\left|\overrightarrow{g(h)}\right| = g(h)$.

Exprimer g(h) en fonction de $M_T$, $R_T$, h et G puis g(h) en fonction de $R_T$, h et $g_0 = g(0)$.

**d)** Appliquer la deuxième loi de NEWTON au satellite en orbite circulaire.

En déduire l'expression de la vitesse $v_s$ du satellite en fonction de $g_0$ , $R_T$ et h puis celle de sa période de révolution Ts.

**e)** Application numérique : Calculer $v_s$ et $T_s$ sachant que $g_0 = 9{,}8$ m.s $^{-2}$ ; h = 200 km et $R_T = 6400$ km.